88107229

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – CONJUNTOS, RELACIONES Y GRUPOS

Lunes 15 de noviembre de 2010 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 8]*

Sea R una relación sobre el conjunto $\mathbb{Z}$, tal que $aRb \Leftrightarrow ab \geq 0$, para $a, b \in \mathbb{Z}$.

(a) Determine si R es

(i) reflexiva;

(ii) simétrica;

(iii) transitiva. *[7 puntos]*

(b) Escriba si R es o no una relación de equivalencia, dando una razón que fundamente su respuesta. *[1 punto]*

2. *[Puntuación máxima: 16]*

(a) Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(m, x) = (-1)^m x$. Determine si f es

(i) sobreyectiva;

(ii) inyectiva. *[4 puntos]*

(b) P es el conjunto de todos los polinomios tales, que $P = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Sea $g : P \to P$, $g(p) = xp$. Determine si g es

(i) sobreyectiva;

(ii) inyectiva. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 2: continuación)

(c) Sea $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}^+$, $h(x)=\begin{cases} 2x, & x>0 \\ 1-2x, & x\le 0 \end{cases}$. Determine si h es

(i) sobreyectiva;

(ii) inyectiva. *[7 puntos]*

(d) De las funciones anteriores, escriba cuáles (de haber alguna) son biyectivas. *[1 punto]*

3. *[Puntuación máxima: 8]*

Demuestre que para los conjuntos A y B

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C).$$

4. *[Puntuación máxima: 20]*

El conjunto $S=\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ y $\circ$ es una operación binaria sobre S definida de la siguiente forma $x_i\circ x_j=x_k$ donde $i+j\equiv k(\text{mod}\,6)$.

(a) (i) Construya la tabla de Cayley para $\{S,\circ\}$ y, a partir de lo anterior, compruebe que es un grupo.

(ii) Compruebe que $\{S,\circ\}$ es cíclico. *[11 puntos]*

(b) Sea $\{G,*\}$ un grupo abeliano de orden 6. El elemento $a\in G$ es de orden 2 y el elemento $b\in G$ es de orden 3.

(i) Escriba los seis elementos de $\{G,*\}$.

(ii) Halle el orden de $a*b$ y a partir de lo anterior, compruebe que $\{G,*\}$ y $\{S,\circ\}$ son isomorfos. *[9 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 8]*

Sea $\{G,*\}$ un grupo finito que contiene un elemento a (que no es el elemento neutro) y sea $H=\{a^n \mid n\in\mathbb{Z}^+\}$, donde $a^2=a*a$, $a^3=a*a*a$ etc.

Compruebe que $\{H,*\}$ es un subgrupo de $\{G,*\}$.